Luồng với chi phí cực tiểu

Lê Quốc Tuấn

Optimal seminar group

Nội dung

Định nghĩa bài toán

Định nghĩa bài toán

Các khái niệm

- $G = (V, A)$ là một đồ thị có hướng.
- c_{ij} là chi phí cho mỗi đơn vị của luồng khi truyền tải trên cạnh $(i, j) \in A$.
- u_{ij} là lưu lượng tối đa có thể truyền tải qua một cạnh.
- $b(i)$ là giá trị trạng thái ứng với mỗi node i. Được định nghĩa:
    - ◇ $b(i) > 0$, node i được gọi là node nguồn (cung cấp), với dung lượng có thể cung cấp là b_i.
    - ◇ $b(i) < 0$, node i được gọi là node đích (tiêu thụ), với dung lượng cần cung cấp là $-b_i$.
    - ◇ $b(i) = 0$, node i được gọi là node trung chuyển.

Định nghĩa bài toán

Bài toán luồng với chi phí cực tiểu được phát biểu như sau:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

subject to

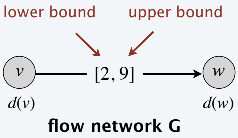
$$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji} = b(i) \quad \text{forall } i \in V$$

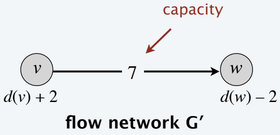
$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \text{forall } (i,j) \in A.$$

Circulation with supplies, demands, and lower bounds

Max-flow formulation. Model lower bounds as circulation with demands.

- Send $\ell(e)$ units of flow along edge e.
- Update demands of both endpoints.





Theorem. There exists a circulation in G iff there exists a circulation in G'. Moreover, if all demands, capacities, and lower bounds in G are integers, then there exists a circulation in G that is integer-valued.

Pf sketch. $f(e)$ is a circulation in G iff $f'(e) = f(e) - \ell(e)$ is a circulation in G'.

Một số giả thiết thêm vào

- $\sum_{i \in V} b(i) = 0$ và bài toán luồng cực tiểu có nghiệm chấp nhận được.
- Lưu lượng u_{ij}, $(i, j) \in A$, và dung lượng node $b(i)$, $i \in V$ là các số nguyên.
- Chi phí truyền tải mỗi đơn vị dòng trên mỗi cạnh $c_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in A$.

Một số ứng dụng

Một số ứng dụng của bài toán luồng cực tiểu

- Bài toán phân phối.
- Xây dựng lại tâm thất trái từ phép chụp X-quang.
- Cân bằng chủng tộc cho mỗi trường học.
- Tối ưu lợi nhuận cho bài toán đường bay.

Thuật toán Cycle-Canceling

Ý tưởng

Dựa trên định lý:

Định lý

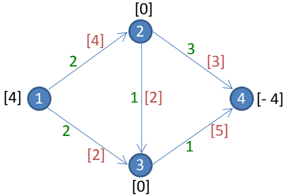
Nghiệm chấp nhận được f^* là nghiệm tối ưu của bài toán luồng cực tiểu nếu và chỉ nếu đồ thị thặng dư D_{f^*} không chứa vòng có chi phí âm.

Cycle-Canceling algorithm

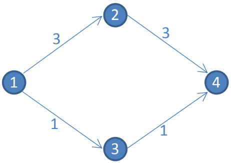
Cycle-Canceling algorithm

1: Establish a feasible flow f in G
2: Generate the reduced network D_f
3: **while** G_f contains a negative cycle **do**
4: Identify a negative cycle W
5: $\delta = \min r_{ij} : (i, j) \in W$
6: augment δ units of flow in the cycle W and update G_f

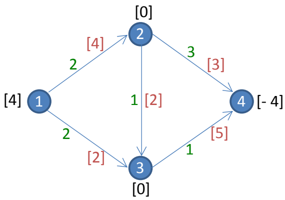
Cycle-canceling algorithm: Example



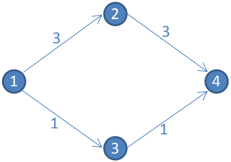
Initial feasible flow of cost 18

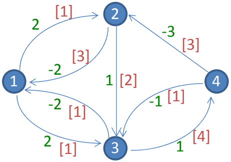


Cycle-canceling algorithm: Example

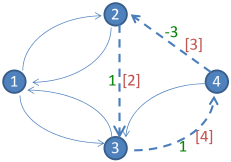


Initial feasible flow of cost 18



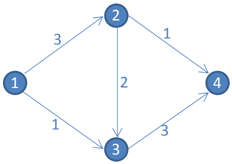


D_f

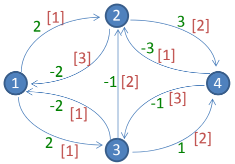


Negative cost cycle (2, 3, 4) of cost -1 and capacity 2.

Cycle-canceling algorithm: Example (Cont.)



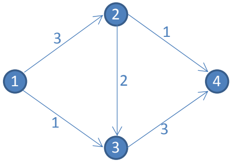
Feasible flow of cost 16



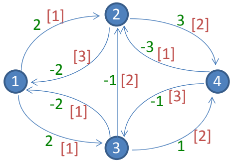
D_f

Negative cost cycle (1, 3, 4, 2) with cost -2 and capacity 1.

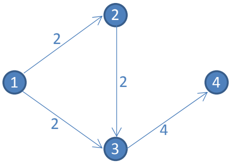
Cycle-canceling algorithm: Example (Cont.)



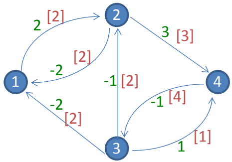
Feasible flow of cost 16



D_f
Negative cost cycle (1, 3, 4, 2) with cost -2 and capacity 1.



Feasible flow of cost 14



No negative cost cycle.

Cycle-Canceling algorithm

Gọi $C = \max\{c_{ij} : (i,j) \in A\}$ và
$U = \max(\max\{u_{ij} : (i,j) \in A\}, \max\{|b(i)| : i \in V\})$

Độ phức tạp tính toán:

- The Bellman-Ford tìm chu trình có giá trị âm $O(mn)$.
- Chi phí khởi tạo của bài toán tối đa là mCU.

ε-tối ưu

Định nghĩa (ε-tối ưu)

Cho π là một nodes potential. Luồng f được gọi là ε-tối ưu nếu:

$$c_{ij}^{\pi} = \overline{c}_{ij} - \pi(i) + \pi(j) \geq -\varepsilon, \quad \text{với mọi } (i,j) \in D_f.$$

Đặt $\varepsilon^{\pi}(f) = -\min\{c_{ij}^{\pi} : (i,j) \in D_f\} \Rightarrow f$ là ε-tối ưu với $\varepsilon = \varepsilon^{\pi}(f)$.

Đặt $\varepsilon(f) = \min_{\pi} \varepsilon^{\pi}(f)$ (giá trị nhỏ nhất của ε sao cho f là ε-tối ưu).

Gọi $\mu(f)$ là chi phí trung bình của chu trình trung bình nhỏ nhất trên D_f. Ta có:

$$\mu(f) = \frac{\sum_{(i,j)\in W} \overline{c}_{ij}}{|W|} = \frac{\sum_{(i,j)\in W} c_{ij}^{\pi}}{|W|} \geq \frac{-\varepsilon(f) \cdot |W|}{|W|} = -\varepsilon(f).$$

Bổ đề

Nếu f là một luồng không tối ưu thì $\varepsilon(f) = -\mu(f)$.

Bổ đề

Nếu f là một luồng không tối ưu thì tồn tại nodes potential π sao cho $c_{ij}^{\pi} = \mu(f) = -\epsilon(f)$ với mọi $(i, j) \in W$ là chu trình trung bình cực tiểu của D_f.

Bổ đề

Với mỗi luồng không tối ưu f, nếu bỏ đi chu trình trung bình cực tiểu thì $\varepsilon(f)$ không thể tăng.

Bổ đề

Nếu bắt đầu với một luồng chấp nhận được f, sau m vòng lặp loại bỏ chu trình trung bình cực tiểu ta thu được luồng chấp nhận được f' thoả mãn:

$$\varepsilon(f') \leq (1 - \frac{1}{n})\varepsilon(f).$$

Bổ đề

Cho α là một số nguyên dương, và $y_1, y_2, \ldots$ là các số thực không âm thoả mãn $y_{k+1} \leq (1 - \frac{1}{\alpha})y_k$ với mọi $k \geq 1$. Khi đó:

$$y_{k+\alpha} \leq \frac{1}{2}y_k.$$

Định lý

Nếu tất cả chi phí cạnh là số nguyên, thuật toán loại bỏ vòng trung bình cực tiểu sẽ dừng sau $nm\log(nC)$ bước thực hiện, và có độ phức tạp tính toán $O(n^2m^2\log(nC))$.

Bổ đề

Giả sử f là một $\varepsilon(f)$-tối ưu với nodes potential π, và tồn tại cạnh $(k,l)\in A$ sao cho $c_{kl}^{\pi}\geq 2n\varepsilon(f)$ thì (k,l) là một ε-cạnh cố định.

Định lý

Với đồ thị D có các cạnh với chi phí thực, thuật toán loại bỏ chu trình trung bình cực tiểu thực hiện $nm^2\log n$ vòng lặp và có độ phức tạp tính toán $O(n^2m^3\log n)$.