

# Cây bao trùm

- ▶ **Cây bao trùm**
- ▶ **Thuật toán Prim**
- ▶ **Thuật toán Kruskal**

# Cây bao trùm (Spanning tree)

**Định nghĩa.** Cho  $H = (V, T)$  là một đồ thị con của một đồ thị vô hướng  $G = (V, E)$ .  $H$  được gọi là *cây bao trùm* của  $G$  nếu  $H$  phi chu trình và liên thông.

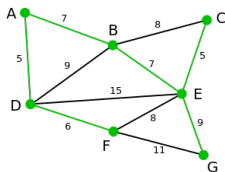
# Tính chất của cây bao trùm

**Tính chất.** Cho  $H = (V, T)$  là một đồ thị con của một đồ thị vô hướng  $G = (V, T)$ . Các khẳng định sau là tương đương:

- ▶  $H$  là cây bao trùm của  $G$ .
- ▶  $H$  là phi chu trình và liên thông.
- ▶  $H$  là liên thông và có  $|V| - 1$  cạnh.
- ▶  $H$  là phi chu trình và có  $|V| - 1$  cạnh.
- ▶  $H$  là liên thông tối thiểu, tức là cứ xóa bất kì cạnh nào sẽ khiến  $H$  trở thành không liên thông.
- ▶  $H$  là phi chu trình tối đa, tức là thêm một cạnh bất kì sẽ tạo ra chu trình.

# Cây bao trùm nhỏ nhất (Minimum spanning tree - MST)

**Định nghĩa.** Cho một đồ thị vô hướng liên thông  $G = (V, E)$  với trọng số cạnh  $c_e$ . *Cây bao trùm nhỏ nhất*  $(V, T)$  là một cây bao trùm của  $V$  sao cho tổng trọng số cạnh trong  $T$  là nhỏ nhất.



**Định lí Cayley.** Đồ thị đầy đủ trên  $n$  đỉnh có  $n^{n-2}$  cây bao trùm.

# Lát cắt

**Định nghĩa.** Một lát cắt (cut) là một phân hoạch các đỉnh trong  $V$  thành hai tập con khác rỗng  $S$  và  $V - S$ .

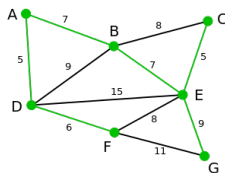
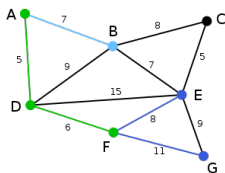
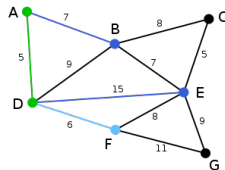
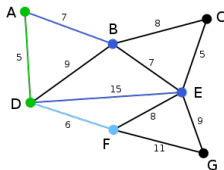
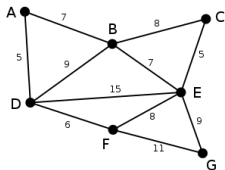
**Định nghĩa.** Tập cạnh cắt (cutset) của một lát cắt  $S$  là tập các cạnh có đúng một đỉnh trong  $S$ .

# Thuật toán Prim

Khởi tạo  $S =$  đỉnh bất kì,  $T = \emptyset$ .

Lặp  $n - 1$  lần:

- ▶ Thêm vào tập  $T$  cạnh có trọng số nhỏ nhất với một đỉnh thuộc  $S$ .
- ▶ Thêm đỉnh còn lại vào  $S$ .



# Thuật toán Prim

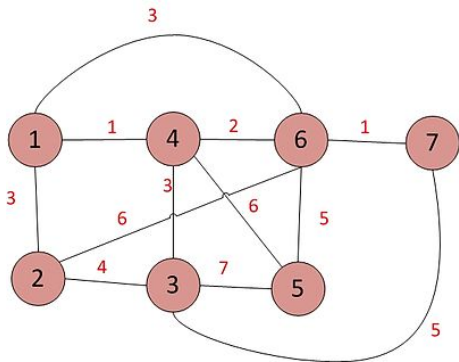
**Định lí.** Thuật toán Prim tìm được một cây bao trùm nhỏ nhất.

**Định lí.** Thuật toán Prim có thể được thực thi để chạy trong thời gian  $O(m \log n)$ .

# Thuật toán Kruskal

Xét các cạnh theo thứ tự trọng số tăng dần.

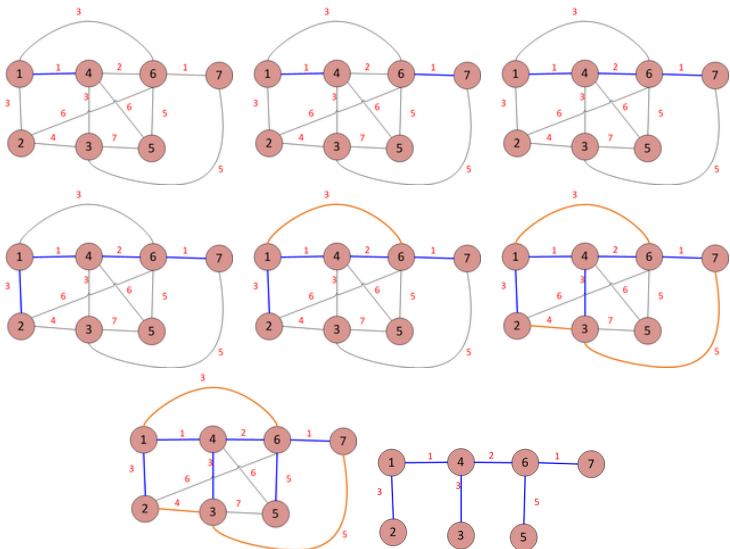
- ▶ Thêm cạnh vào cây trừ khi nó tạo ra chu trình.



Điểm đầu	Điểm cuối	Trọng số
1	4	1
6	7	1
4	6	2
1	2	3
1	6	3
3	4	3
2	3	4
3	7	5
5	6	5
2	6	6
4	5	6
3	5	7



# Thuật toán Kruskal



# Thuật toán Kruskal

**Định lí.** Thuật toán Kruskal tìm ra cây bao trùm nhỏ nhất.

**Định lí.** Thuật toán Kruskal có thể được thực thi để chạy trong thời gian  $O(m \log m)$ .